1 அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகள்-பயன்பாடுகள்

அலகு:1 சேர்ப்பு,நேர்மாறு மற்றும் செங்குத்து அணி

முக்கிய முடிவுகள்:

i) A இன் சேர்ப்புஅணி: $adjA=\left[A_{ij}\right]^{T}$

ii) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$

iii) செங்குத்து அணி: $AA^{T}=I$ or $A^{-1}=A^{T}$

iv) சேர்ப்பு அணியின் பண்புகள்:

$$A(adjA)=(adjA)A=|A|I$$

$$adj(AB)=(adjB)(adjA)$$

v) நேர்மாறு அணியின் பண்புகள்:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

$$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$$

vi) A and A^{-1} காணல்: adj(A) கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$A^{-1}=\pm\frac{1}{\sqrt{|adjA|}}adj(A)$$

$$A=\pm\frac{1}{\sqrt{|adjA|}}adj(adjA)$$

---

1) $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, எனில் $A^{2}-3A-7I_{2}=O_{2}$ என நிறுவுக, மேலும் A^{-1} காண்க.

தீர்வு:

$$A^{2}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 9\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{2}-3A-7I_{2}=\begin{pmatrix}22 & 9\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15 & -9\\ 3 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^{2}-3A-7I_{2}=O_{2}$$

A^{-1} ஆல் முன் பெருக்கம் செய்ய

$$A-3I-7A^{-1}=O$$

$$A^{-1}=\frac{1}{7}(A-3I)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -5\end{pmatrix}$$

2) சரிபார்க்கவும்: $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$ இங்கு A= $\begin{pmatrix}2 & 9\\ 1 & 7\end{pmatrix}$

தீர்வு: $A^{T}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 7\end{pmatrix}$ and $\left|A^{T}\right|=5$

$$\left(A^{T}\right)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}\to(1)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -9\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(A^{-1}\right)^{T}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}\to(2)$$

$\therefore$ (1) ,(2) லிருந்து

$$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$$

---

3) $A=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}6 & -3 & a\\ b & -2 & 6\\ 2 & c & 3\end{bmatrix}$ செங்குத்து அணி எனில் a , b மற்றும் c காண்க. மேலும் A^{-1} காண்க.

தீர்வு:

A செங்குத்து அணி $\Rightarrow AA^{T}=I$

$$\begin{bmatrix}a^{2}+45 & 6a+6b+6 & 3a-3c+12\\ 6a+6b+6 & b^{2}+40 & 2b-2c+18\\ 3a-3c+12 & 2b-2c+18 & c^{2}+13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49 & 0 & 0\\ 0 & 49 & 0\\ 0 & 0 & 49\end{bmatrix}$$

தீர்க்க

$$a+b=-1$$

$$a-c=-4 \quad\Rightarrow\quad a=2\ ;\ b=-3\ ;\ c=6$$

$$b-c=-9$$

$$\therefore A^{-1}=A^{T}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}6 & -3 & 2\\ -3 & -2 & 6\\ 2 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

---

4) $adj(A)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$, எனில் A^{-1} காண்க.

தீர்வு:

$$|adjA|=9\ \sqrt{|adjA|}=3$$

$$A^{-1}=\pm\frac{1}{\sqrt{|adjA|}}adj(A)$$

$$=\pm\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

5) $adj(A)=\begin{bmatrix}2 & -4 & 2\\ -3 & 12 & -7\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$, எனில் A காண்க.

தீர்வு:

$$|adjA|=16 \Rightarrow \sqrt{|adjA|}=4$$

$$A=\pm\frac{1}{\sqrt{|adjA|}}adj(adjA)$$

$$adj(adjA)=\begin{bmatrix}24 & 8 & 4\\ 20 & 8 & 8\\ 24 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

$$A=\pm\frac{1}{4}\begin{bmatrix}24 & 8 & 4\\ 20 & 8 & 8\\ 24 & 8 & 12\end{bmatrix}=\pm\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

6) $A=\begin{pmatrix}1 & \tan x\\ -\tan x & 1\end{pmatrix}$, எனில்

$A^TA^{-1}=\begin{bmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{bmatrix}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & -\tan x\\ \tan x & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|=1+\tan^2 x=\sec^2 x$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA=\frac{1}{\sec^2 x}\begin{pmatrix}1 & -\tan x\\ \tan x & 1\end{pmatrix}$$

$$=\cos^2 x\begin{pmatrix}1 & -\tan x\\ \tan x & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 x & -\sin x\cos x\\ \sin x\cos x & \cos^2 x\end{pmatrix}$$

$$A^TA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\tan x\\ \tan x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos^2 x & -\sin x\cos x\\ \sin x\cos x & \cos^2 x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}$$

7) $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ என்ற அணியை பிந்தையப் பெருக்கல் சங்கேத மொழியாக்க அணியாகக் கொண்டு $[2\ \ -3],[20\ \ 4]$ என்று பெறப்பட்ட செய்தியை $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறு அணியின் பிந்தையப் பெருக்கற் சாவியாகக் கொண்டு சங்கேத மொழிமாற்றம் செய்க.

தீர்வு: சங்கேத மொழிமாற்றத்திற்கான அணி

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

நிரையணி	சங்கேத மொழிமாற்ற அணி	மொழிமாற்றம் செய்யப்பட்டது
$[2\ \ -3]$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$	$[8\ \ 5]$
$[20\ \ 4]$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$	$[12\ \ 16]$

ஆங்கில எழுத்து வரிசைப்படி

$$[8\ \ 5][12\ \ 16]\Rightarrow HELP$$

அலகு: II

- நிரை ஏறுபடி வடிவம்
- அணியின் தரம் - சிற்றணிக்கோவை முறை
- அணியின் தரம் - நிரை ஏறுபடி வடிவம்
- காஸ்-ஜோர்டான் முறை:
  A பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்
  $$[A]\rightarrow[I_n]$$
- காஸ்-ஜோர்டான் முறையில் நேர்மாறு
  $$[A/I_n]\rightarrow[I_n/A^{-1}]\ ;\ |A|\neq 0$$

8) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 8 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தை சிற்றணிக்கோவையைப் பயன்படுத்தி காண்க.

தீர்வு:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 3\\ 8 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \rho(A)\le 3$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 8 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\ But\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$\therefore \rho(A)=3$$

$\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தை ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 14 & -4 \end{bmatrix} \quad -2R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad -2R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\therefore \rho(A) = 3$$

10) காஸ்-ஜோர்டம் நீக்கல் முறையில் $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறுகாண்க.

தீர்வு:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

$$[A/I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-5R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \to [I/A^{-1}]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

11) காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறையில் $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

தீர்வு:

$$[A/I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_2 + R_3 \to R_3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} R_1 + 8R_3 \to R_1 \\ -1 \times R_3 \to R_3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad R_2 + 3R_3 \to R_2$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

அலகு:III

- நேர்மாறு அணிமுறையில் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்

$$A \times X = B$$

- $|A| \neq 0$ (ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும்)

$$\therefore X = A^{-1}B$$

- நடைமுறை கணக்குகள்

12) நேர்மாறு அணிமுறையில் தீர்க்கவும்:

$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5$; $x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$ மற்றும் $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3$

தீர்வு:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

$$|A| = 40 \neq 0$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

13) ஒருவர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாத ஊதியத்தில் ஒரு பணியில் அமர்த்தப்படுகிறார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரு நிலையான ஊதிய உயர்வு அவருக்கு வழ்ங்கப்படுகிறது. 3 ஆணுட்களுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ரூ.19800 மற்றும் 9 ஆண்டுகளுக்கு பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ரூ.23400 எனில் அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் மற்றும் ஆண்டு உயர்வு எவ்வளவு என்பதை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் காண்க.

தீர்வு:

$$x + 3y = 19800$$
$$x + 9y = 23400$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

$$|A| = 6 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18000 \\ 600 \end{bmatrix}$$

14) 4 ஆடவரும் 4 மகளிரும் சேர்ந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வேலையை 3 நாட்களில் செய்து முடிப்பார்கள். அதே வேலையை 2 ஆடவரும் 5 மகளிரும் சேர்ந்து 4 நாட்களில் முடிப்பார்கள் எனில் அவ்வேலையை ஓர் ஆடவர் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனித்தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு எத்தனை நாட்களாகும் என்பதை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு:

ஆண் ஒரு நாள் செய்யும் வேலை = $\frac{1}{x}$

பெண் ஒரு நாள் செய்யும் வேலை = $\frac{1}{y}$

கணக்கின்படி: $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{3}$; $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4}$

பிரதியிடுக: $\frac{1}{x}$ = a மற்றும் $\frac{1}{y}$ = b

$$4a + 4b = \frac{1}{3} \Rightarrow 12a + 12b = 1$$

$$2a + 5b = \frac{1}{4} \Rightarrow 8a + 20b = 1$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

$$|A| = 144 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/18 \\ 1/36 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \end{bmatrix}$$

அலகு: IV

- கிராமரின் விதிப்படி சமன்பாடுகள் தீர்த்தல்

  $\Delta \neq 0$

  எனில் கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தலாம். ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு

  $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

  $$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

- கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி நடைமுறைக் கணக்குகளை தீர்த்தல்

கிராமரி விதியை பயன்படுத்தி தீர்க்க:

$\frac{3}{x}-\frac{4}{y}-\frac{2}{z}-1=0$; $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}-2=0$ மற்றும்

$\frac{2}{x}-\frac{5}{y}-\frac{4}{z}+1=0$

தீர்வு:

பிரதியிடல்: $\frac{1}{x}=a$; $\frac{1}{y}=b$; $\frac{1}{z}=c$

$$3a-4b-2c=1$$
$$a+2b+c=2$$
$$2a-5b-4c=-1$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}3 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -5 & -4\end{bmatrix}=-15\neq 0$$

$$\Delta_a=\begin{bmatrix}1 & -4 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & -5 & -4\end{bmatrix}=-15$$

$$\Delta_b=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -4\end{bmatrix}=-5$$

$$\Delta_c=\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -5 & -1\end{bmatrix}=-5$$

கிராமரின் விதிப்படி

$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}$; $b=\frac{\Delta_b}{\Delta}$; $c=\frac{\Delta_c}{\Delta}$

$a=1$; $b=\frac{1}{3}$; $c=\frac{1}{3}$

$x=1$; $y=3$; $z=3$

16) ஒரு போட்டித் தேர்வில் ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கும் ஒரு மதிப்பெண் வழங்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கும் 1/4 மதிப்பெண் குறைக்கப்படுகிறது. ஒரு மாணவர் 100 கேள்விகளுக்குப் படிலளித்து 80 மதிப்பெண் பெறுகிறார் எனில் அவர் எத்தனை கேஆள்விகளுக்குச் சரியாக பதில் அளித்திருப்பார்? கிராமரின் விதியை பயன்பத்தி இக்கணக்கை தீர்க்கவும்.

தீர்வு: கணக்கின்படி

$$x+y=100$$
$$x-\frac{1}{4}y=80\Rightarrow 4x-y=320$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}100 & 1\\ 320 & -1\end{vmatrix}=-420$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 100\\ 4 & 320\end{vmatrix}=-80$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=84 \ \& \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=16$$

17) வேதியாளர் ஒருவரிடம் 50% அமிலத்தன்மை கொண்ட ஒரு கரைசலும் மற்றும் 25% அமிலத்தன்மை கொண்ட மற்றொரு கரைசலும் உள்ளது. அவர் 10 லிட்டர் கரைசலில் 40% அமிலத்தன்மை உள்ளவாறு ஒரு கரைசலை உருவாக்க இருவகைக் கரைசல்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் எத்தனை லிட்டர் சேர்க்க வேண்டும்? கிராமரின் விதிப்படி தீர்க்கவும்.

தீர்வு:

கணக்கின்படி: $x+y=10$

$$\frac{50}{100}x+\frac{25}{100}y=\frac{40}{100}\times 10\Rightarrow 50x+25y=400$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 50 & 25\end{vmatrix}=-25$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}10 & 1\\ 400 & 25\end{vmatrix}=-150$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 10\\ 50 & 400\end{vmatrix}=-100$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=6 \ \& \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=4$$

18) ஒரு மீன் தொட்டியை பம்பு A மற்றும் பம்பு B என்பன ஒன்றாகச் சேர்ந்து 10 நிமிடங்களில் நீரை நிரப்பும். பம்பு B ஆனது நீரை உள்ளே அல்லது வெளியே ஒரே வேகத்தில் அனுப்ப இயலும். எதிபாராதவிதமாக பம்பு B ஆனது நீரை வெளியே அனுப்பினால் தொட்டி நிரம்ப 30 நிமிடங்கள் ஆகும் எனில் ஒவ்வொரு பம்பும் தொட்டியை தனித்தனியாக நிரப்ப எவ்வளவு காலம் எடுத்துக் கொள்ளும்?

தீர்வு:

ஒரு நிமிடத்தில் பம்பு A இன் திறன் = $\frac{1}{x}$

ஒரு நிமிடத்தில் பம்பு B இன் திறன் = $\frac{1}{y}$

கணக்கின்படி: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$

பிரதியிடல்: $\frac{1}{x}=a$ & $\frac{1}{y}=b$

$10a+10b=1$

$30a-30b=1$

$\Delta=\begin{vmatrix}10 & 10\\30 & -30\end{vmatrix}=-600$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 10\\1 & -30\end{vmatrix}=-40$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}10 & 1\\30 & 1\end{vmatrix}=-20$

$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}$ & $b=\frac{\Delta_b}{\Delta}$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$ & $\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$

$x=15$ & $y=30$

அலகு:V

- காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் சமன்பாடுகள் தீர்த்தல்
- விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவில் எழுதவும்

$$[A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\0 & b_2 & c_2 & d_2\\0 & 0 & c_3 & d_3\end{array}\right]$$

---

19) காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்கவும்.

$2x-2y+3z=2$; $x+2y-z=3$; $3x-y+2z=1$

தீர்வு:

$$[A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 3 & 2\\1 & 2 & -1 & 3\\3 & -1 & 2 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 3\\0 & -6 & 5 & -4\\0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right]$$

சமன்படுகளாக மாற்ற

$$x+2y-z=3$$
$$-6y+5z=-4$$
$$z=4$$

$(x,y,z)=(-1,4,4)$

20) ax^2+bx+c ஐ x+3, x-5 மற்றும் x-1 ஆல் வகுக்கும் போது மீதியானது முறையே 21, 61 மற்றும் 9 எனில் a, b மற்றும் c-ஐக் காண்க. (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்தவும்)

தீர்வு:

$$p(x)=ax^2+bx+c$$
$$p(-3)=21\Rightarrow 9a-3b+c=21$$
$$p(5)=61\Rightarrow 25a+5b+c=61$$
$$p(1)=9\Rightarrow a+b+c=9$$

$$[A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c}9 & -3 & 1 & 21\\25 & 5 & 1 & 61\\1 & 1 & 1 & 9\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 9\\0 & 5 & 6 & 41\\0 & 0 & 1 & 6\end{array}\right]$$

$$a+b+c=9$$
$$5b+6c=41$$
$$c=6$$
$$\therefore (a,b,c)=(2,1,6)$$

---

21) ஒரு சிறுவன் $y=ax^2+bx+c$ என்ற பாதையில் (-6,8), (-2,-12), (3,8) எனும் புள்ளிகள் வழியாக செல்கிறான். P(7,60) என்ற புள்ளியில் உள்ள அவனுடை நண்பனை சந்திக்க விரும்புகிறான். அவன் அவனுடைய நண்பனை சந்திப்பானா? (காஸ்ஸியன் நீக்கல் விதியை பயன்படுத்தவும்)

தீர்வு: கணக்கின்படி: $y=ax^2+bx+c$

$$(x,y)=(-6,8)\Rightarrow 36a-6b+c=8$$
$$(x,y)=(-2,-12)\Rightarrow 4a-2b+c=-12$$
$$(x,y)=(3,8)\Rightarrow 9a+3b+c=8$$

$$[A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c}36 & -6 & 1 & 8\\4 & -2 & 1 & -12\\9 & 3 & 1 & 8\end{array}\right]$$

$$[A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c}36 & -6 & 1 & 8\\0 & -3 & 2 & -29\\0 & 0 & 1 & -10\end{array}\right]$$

$$36a-6b+c=8$$
$$-3b+2c=-29$$
$$c=-10$$

மன்பாடுகளைத் தீர்க்க

$(a,b,c)=(1,3,-10)\Rightarrow y=x^2+3x-10$

$x=7\Rightarrow y=60$

(7,60) என்ற புள்ளி சமன்பாட்டை நிறைவு செய்வதால் அந்த பையன் P(7,60) என்ற புள்ளியில் இருக்கும் நண்பனை சந்திப்பான்.

அலகு: VI

- ஒருங்கமைவு சோதனை: அசமபடித்தான சமன்பாடுகள்
- ரூச்சி-கபெல்லி தேற்றம்

  $\rho(A)=\rho[A/B]\Rightarrow$ ஒருங்கமைவுடையது
- $\rho(A)=\rho[A/B]=3\Rightarrow$ ஒரேத்தீர்வு
- $\left.\begin{matrix}\rho(A)=\rho[A/B]=2\\ \rho(A)=\rho[A/B]=1\end{matrix}\right\}<3$ பலத் தீர்வுகள்
- $\rho(A)\neq\rho[A/B]\Rightarrow$ தீர்வு இல்லை

22) k இன் எம்பதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பு

$kx-2y+z=1$; $x-2ky+z=-2$; $x-2y+kz=1$

i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது ii) ஒரே ஒரு தீர்வு iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும் என ஆராய்க.

தீர்வு:

$$[A/B]=\left[\begin{array}{ccc|c}k&-2&1&1\\1&-2k&1&-2\\1&-2&k&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&k&1\\0&2-2k&1-k&-3\\0&2k-2&1-k^2&1-k\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&k&1\\0&2-2k&1-k&-3\\0&0&(k+2)(1-k)&-(k+2)\end{array}\right]$$

நிலை(i) k=1 எனில்

$\rho(A)\neq\rho[A/B]$ தீர்வு இல்லை

நிலை(ii) $k+2\neq0$ எனில்

$\rho(A)=\rho[A/B]=3$ ஒரே ஒரு தீர்வு

நிலை(iii) k+2=0 எனில்

$\rho(A)=\rho[A/B]=2<3$ எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்

அலகு:VII

- சமபடித்தான சமன்பாடுகள்

  – எப்பொழுதும் ஒருங்கமைவுடையது
- வெளிப்படைத் தீர்வு: $|A|\neq0$

  $\rho(A)=\rho[A/B]=3$

  வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டும்

  $\Rightarrow(x,y,z)=(0,0,0)$
- வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் : $|A|=0$

  $\left.\begin{matrix}\rho(A)=\rho[A/B]=2\\ \rho(A)=\rho[A/B]=1\end{matrix}\right\}<3$

  எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்

23) காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வேதியல் எதிவினைச் சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக $C_2H_6+O_2\rightarrow H_2O+CO_2$

தீர்வு:

$x_1C_2H_6+x_2O_2\rightarrow x_3H_2O+x_4CO_2$

$C\rightarrow 2x_1+0x_2+0x_3-x_4=0$

$H\rightarrow 3x_1+0x_2-x_3+0x_4=0$

$O\rightarrow 0x_1+2x_2-x_3-2x_4=0$

$$[A/O]=\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&0&-1&0\\3&0&-1&0&0\\0&2&-1&-2&0\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&0&-1&0\\0&2&-1&-2&0\\0&0&-2&3&0\end{array}\right]$$

$\rho(A)=\rho[A/O]=3<4$ ஒருங்கமைவு உடையது. பலதீர்வுகள் உண்டு

$2x_1-x_4=0$

$2x_2-x_3-2x_4=0$

$-2x_3+3x_4=0$

$put\ x_4=t\Rightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{t}{2},\frac{7t}{4},\frac{3t}{2},t\right)$

$When\ t=4\Rightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,7,6,4)$

$\therefore 2C_2H_6+7O_2\rightarrow 6H_2O+4CO_2$

*****